Exercices corrigés

TD2 : fonctions mesurables, propriétés des mesures

Exercice 1 Soit $f : (E, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable et $k > 0$. On définit f_k par

$$f_k(x) = \left| \begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & |f(x)| \leq k \\ k & \text{si} & f(x) > k \\ -k & \text{si} & f(x) < -k \end{array} \right.$$

Faire un schéma. Montrer que f_k est également $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

Exercice 2 Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

1) Montrer que $A \in \mathcal{T} \iff \mathbb{1}_A$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.
2) On suppose que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(E)$. Exhiber une application $f : E \to \mathbb{R}$ non $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et telle que $|f|$ soit $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. On pourra essayer de faire en sorte que $|f| = \mathbb{1}_E$.

Exercice 3 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.

1. On suppose que pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$. Montrer que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

2. On suppose que pour tout n, $A_{n+1} \subset A_n$ et que $\mu(A_1) < \infty$. Montrer que

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

   Ce résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $\mu(A_1) < \infty$?

3. Dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que $\lambda(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En déduire que $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Exercice 4 *Lemme de Borel-Cantelli*
Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < \infty,$$

et F la partie de E définie par

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right).$$

On dit qu'un élément de F appartient à une infinité des A_k, ou encore que F est l'ensemble $\limsup(A_n)$.

1) Montrer que $F \in \mathcal{T}$ et que $\mu(F) = 0$. C'est le lemme de Borel-Cantelli.

2) *Application* : soit $(f_n)_n$ et f des fonctions définies sur E à valeurs réelles $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. On suppose que pour tout $a > 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(|f_n - f| > a) < \infty.$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement μ-presque-partout vers f.

Exercice 5 1) Soit E un ensemble non-vide, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ et $a \in E$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{T}$:

$$\delta_a(A) = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{array} \right.$$

On appelle δ_a la mesure de Dirac en a.

(i) Montrer que δ_a est effectivement une mesure.

(ii) Montrer que δ_a est σ-finie.

(iii) Déterminer les parties de E négligeables pour δ_a.

2) Soit D un ensemble dénombrable (*i.e.* en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est le cas de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ par exemples) muni de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(D)$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose $\mu(A) =$Card(A). Si A est un ensemble fini, $\mu(A)$ est alors son cardinal, si A est infini, $\mu(A) = +\infty$. On appelle μ la mesure de comptage sur D.

Reprendre les points de la question précédente pour la mesure de comptage.

Exercice 6 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(F,\mathcal{U})$ un espace mesurable et $g : E \to F$ une application $(\mathcal{T},\mathcal{U})$-mesurable. Pour tout $B \in \mathcal{U}$, on pose $\nu(B) = \mu(g^{-1}(B))$.

1) Montrer que ν est une mesure sur $(F,\mathcal{U})$. On dit que ν est la mesure image de μ par l'application g.

2) On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on considère $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière. Montrer que g est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$-mesurable et déterminer la mesure image de λ par g.

3) On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_a)$ où a est un réel fixé et on considère $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable. Déterminer la mesure image de δ_a par g.

Exercice 7 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(F,\mathcal{U})$ un espace mesurable et $g : E \to F$ une application $(\mathcal{T},\mathcal{U})$-mesurable. On note $g \star \mu$ la mesure image de μ par l'application g :

$$\forall B \in \mathcal{U},\ (g \star \mu)(B) = \mu(g^{-1}(B)).$$

Soit $f : F \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. Montrer que f est $g \star \mu$-intégrable si et seulement si $f \circ g$ est μ-intégrable et que dans ce cas on a :

$$\int_F f\, d(g \star \mu) = \int_E f \circ g\, d\mu.$$

Exercice 8 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $h : E \to [0, +\infty]$ une application mesurable. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose

$$\nu(A) = \int_A h\, d\mu.$$

1) Montrer que ν est une mesure sur $(E, \mathcal{T})$. On dit que ν admet h comme densité par rapport à la mesure μ, on note $\nu = h.\mu$ ou $d\nu = h\, d\mu$.
2) Soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) = 0$. Montrer que $\nu(A) = 0$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ.
3) Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. Montrer que f est ν-intégrable si et seulement si fh est μ-intégrable et que dans ce cas on a :

$$\int_E f\, d\nu = \int^E fh\, d\mu$$

où fh désigne la multiplication des fonctions.

Exercice 9 Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert U de $\mathbb{R}$, dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U) \leq \varepsilon$. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et dénombrable.

Exercice 10 1) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Si U est borné, montrer que $\lambda(U)$ est finie. La réciproque est-elle vraie ?
2) Soit A un borelien de $\mathbb{R}$. Si A contient un ouvert non-vide, montrer que $\lambda(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11 Dans cet exercice, on exhibe une partie de $\mathbb{R}$ non borélienne.
On considère la relation $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$ sur $[0, 1[$. (montrer que c'est une relation d'équivalence).
Pour $x \in [0, 1[$, on note $\overline{x}$ la classe de x modulo $\mathcal{R}$. On appelle F l'ensemble obtenu en choisissant exactement un élément dans chaque classe. Autrement dit si y et z sont deux éléments de F distincts, alors $\overline{y} \neq \overline{z}$.
Enfin, pour $q \in \mathbb{R}$, on définit le translaté de F par q comme $F + q = \{y + q,\ y \in F\}$.

1) Soit q et r deux rationnels distincts. Montrer que $F + q \cap F + r = \emptyset$.
2) Montrer que

$$[0, 1[\subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} F + q \ \subset\ [-1, 2]$$

3) Supposons que $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Aboutir à une contradiction en considérant

$$\lambda\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} F + q\right).$$

Exercice 12 *Additivité de l'intégrale de Lebesgue sur les fonctions positives*
Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f, g deux fonctions positives mesurables. Montrer que

$$\int_E f + g \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

On pourra commencer par supposer que f et g sont étagées. Puis utiliser un théorème d'approximation de fonctions mesurables positives par des fonctions étagées et enfin le théorème de convergence monotone (Beppo-Levi).

Exercice 13 *Intégration terme à terme d'une série de fonctions positives*
Soit f_n une suite de fonctions mesurables positives sur $(E, \mathcal{T}, \mu)$. On définit la fonction F pour tout $x \in E$ par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Montrer que la fonction F est mesurable positive et que

$$\int_E F \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

On pourra utiliser l'exercice précédent et le théorème de convergence monotone.

Exercice 14 On travaille sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de dénombrement μ : pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\mu(A)$ est le cardinal de A si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ dans le cas contraire.

1) Soit $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ une fonction positive sur $\mathbb{N}$. On peut également voir f comme une suite de nombres réels positifs $u_n = f(n)$. En remarquant que f s'écrit $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \mathbb{1}_{\{n\}}$, expliciter la valeur de $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu$.
2) Soit $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$ une suite double de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p} \right).$$

3) Calculer

$$\sum_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right)$$

Exercice 15 *Intégrale de Gauss*
On se propose de calculer l'intégrale de Gauss :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx.$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(1 - x^2/n)^n$ converge vers e^{-x^2} de manière croissante (à partir d'un certain rang). Pour la croissance, on pourra faire un développement limité du logarithme du rapport de deux termes consécutifs.

2) On considère la suite de fonctions

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x).$$

Montrer que f_n est une suite croissante de fonctions positives qui converge simplement vers la fonction $x \mapsto e^{-x^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

3) En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$$

4) On rappelle que les intégrales de Wallis, définies par,

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \, d\theta,$$

vérifient $I_m \sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}}$ lorsque m tend vers l'infini. Conclure en effectuant un changement de variable.

TD4 Théorèmes de convergence

Exercice 16 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives sur $(E, \mathcal{T}, \mu)$ qui converge simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_E f_n \, d\mu \leq M.$$

Montrer que

$$\int_E f \, d\mu \leq M.$$

Exercice 17 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose que $\displaystyle\int_E f_0 \, d\mu < +\infty$.
Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu < +\infty.$$

On donnera deux démonstrations : une utilisant le théorème de convergence monotone et l'autre le théorème de convergence dominée.
Peut-on supprimer l'hypothèse $\displaystyle\int_E f_0 \, d\mu < +\infty$? Si non, donner un contre exemple.

Exercice 18 Calculer les limites quand $n \to +\infty$ des quantités suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + nx}{(1 + x)^n} \, dx$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) e^{-n \sin^2 x} \, dx$ où f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3) $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \, dx$

4) $\displaystyle\int_0^n \ln x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \, dx$. On pourra en profiter pour donner une expression intégrale de la constante d'Euler.

Exercice 19 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to [0, +\infty[$ une application mesurable positive. On suppose que $0 < \int_E f \, d\mu < +\infty$. Calculer, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E n \ln \left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) \, d\mu(x).$$

On pourra dans certains cas utiliser l'inégalité $1 + t^\alpha \leq (1 + t)^\alpha$ valable pour tous $t \geq 0$, $\alpha > 1$.

Exercice 20 *Sur l'hypothèse de domination*

1) Soit $n \geq 1$ et f_n la fonction affine par morceaux et continue définie par

$$\begin{aligned} &f_n(x) = 0, \ \forall x \notin [n, 2n] \\ &f_n(0) = f_n(2n) = 0 \\ &f_n(n) = 1/n \end{aligned}$$

(a) Faire un dessin et montrer qu'à x fixé, $f_n(x)$ converge vers 0.

(b) Calculer $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$.

(c) Le théorème de convergence dominée reste-t-il vrai si l'on omet l'hypothèse de domination ?

2) Dans le théorème de convergence dominée, l'existence d'une fonction g intégrable et majorant toutes les f_n assure la convergence des intégrales. On s'intéresse ici à la réciproque. Soit $n \geq 1$ et f_n la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[n,n+1]}(x).$$

(a) Montrer qu'à x fixé, $f_n(x)$ converge vers 0.

(b) Calculer $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$. Cette quantité converge-t-elle ?

(c) Soit g une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x)| \leq g(x)$. Montrer que $g(x) \geq 1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que g n'est pas intégrable.

(d) Que pensez-vous de la réciproque du théorème de convergence dominée ?

Exercice 21 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable sur E. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall A \in \mathcal{T},\ \mu(A) < \eta \Longrightarrow \left| \int_A f\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Autrement dit, $\int_A f\, d\mu$ tend vers 0 lorsque la mesure de A tend vers 0.

Exercice 22 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$. Soit également $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur E. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

Ce résultat reste-t-il vrai si l'on enlève l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$.

Exercice 23 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout vers une fonction intégrable f.

1) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu$$

2) Réciproquement, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_E |f_n|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

On pourra utiliser la suite de fonctions $g_n = |f| + |f_n| - |f - f_n|$ et lui appliquer le seul théorème de convergence dont elle satisfait les hypothèses.

3) Résumer les résultats des questions précédentes en une équivalence.

4) On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions intégrables qui converge vers une fonction f intégrable, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu$$

et telle que, pourtant, $\left(\int_E |f_n - f|\, d\mu\right)$ ne tende pas vers 0.

TD5 Fonctions définies par des intégrales

Exercice 24 Pour $x \geq 0$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3} dt.$

1) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que f est décroissante.

3) Calculer $f(0)$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 25 Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t+x} dt.$

1) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Etudier les variations de f

3) Déterminer, si elles existent $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to0^+} f(x)$

4) Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 26 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2.$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f' + g' = 0$.

3) Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

Exercice 27 Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\, dt.$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f vérifie l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{2}y$.

3) En déduire une expression explicite de f.

Exercice 28 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré vérifiant $0 < \mu(E) < +\infty$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $f : E \to [\varepsilon, +\infty[$ une fonction intégrable sur E.

1. Soit $\alpha \in [0,1]$. Montrer que f^α est une fonction intégrable sur E. Même question pour $\ln f$.
2. Pour $\alpha \in [0,1]$ on pose $F(\alpha) = \displaystyle\int_E f^\alpha\, d\mu$. Montrer que F est dérivable sur $[0, 1/2[$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire la valeur de

$$\lim_{\alpha\to0} \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f^\alpha\, d\mu\right)^{1/\alpha}$$

Exercice 29 Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1) Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer que Γ est une fonction convexe.
4) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout réel $x > 0$. En déduire une expression de $\Gamma(n)$ pour n entier non nul.
5) Effectuer le changement de variable $u = \frac{t-n}{\sqrt{n}}$ pour montrer que

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}\,du.$$

6) Déduire de la question précédente la formule de Stirling

$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

7) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n_x! = x(x+1)\dots(x+n)$.
   a) Montrer que
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.$$
   b) Montrer que
   $$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \frac{n^x.n!}{n_x!}$$
   c) En déduire un équivalent de $n_x!$ lorsque $n \to +\infty$.

TD6 Intégration sur un espace produit

Exercice 30 Soit $0 < a < b$ deux réels. On considère l'espace $A =]0, +\infty[\times]a, b[$ muni de sa tribu Borélienne et de la mesure λ produit des mesures de lebesgue.

1) Montrer que l'application définie sur A par $f(x, y) = e^{-xy}$ est intégrable.

2) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx$$

Exercice 31 On travaille sur $\mathbb{R}^2$ muni de la tribu borélienne et de la mesure μ produit des mesures de Lebesgue. On note $D =]0, +\infty[^2$.

1) Calculer

$$\int_D \frac{1}{(1 + x^2y)(1 + y)} \, d\mu$$

2) En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \, dx \quad \text{et de} \quad 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} \, dx.$$

3) En déduire les sommes des séries de termes généraux $\dfrac{1}{(2n + 1)^2}$ et $\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 32 1) On considère la mesure de comptage μ sur $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. On définit f sur $\mathbb{N}^2$ par

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -1 & \text{si } m = n + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) f est-elle $\mu \otimes \mu$-intégrable ?

(b) Calculer

$$\int \left(\int f(m, n) \, d\mu(m) \right) d\mu(n) \quad \text{et} \quad \int \left(\int f(m, n) \, d\mu(n) \right) d\mu(m).$$

Le résultat est-il compatible avec le théorème de Fubini ? Permet-il de répondre à la question 1) ?

2) Sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$, on considère la mesure de Lebesgue λ et la mesure de comptage μ (pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})([0, 1])$, on a donc $\mu(A) =$Card(A) si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ sinon). On pose D la diagonale $D = \{(x, x), \ x \in [0, 1]\}$.

(a) Montrer que D est un borélien de $[0, 1]^2$.

(b) Calculer

$$\int \left(\int \mathbb{1}_D(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\mu(y) \quad \text{et} \quad \int \left(\int \mathbb{1}_D(x, y) \, d\mu(x) \right) d\lambda(y).$$

Le résultat est-il compatible avec le théorème de Tonelli ?

Exercice 33 1) Soit la fonction f définie sur $[-1,1]^2$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que f est mesurable pour la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser le fait que la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.

(b) Calculer

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\, dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

(c) La fonction f est-elle intégrable sur $[-1,1]^2$?

2) Mêmes questions avec la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 34 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. Montrer que

$$\int_E f\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\})\, dt.$$

Exercice 35 1) Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son intégrale. Retrouver ainsi la valeur de l'intégrale de Gauss.

2) Etudier maintenant l'intégrabilité de l'application $g(x,y) = e^{-(x^2+2xy+2y^2)}$.

Exercice 36 *Produit de convolution de deux fonctions intégrables.*
Soit f et g deux fonctions intégrables sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ où λ_n désigne la mesure produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ par $h(x,y) = f(x-y)g(y)$.

1) Montrer que h est intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2) En déduire que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la quantité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\, d\lambda_n(y)$ est bien définie. On note $f \star g$ l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\, d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, d\lambda_n(y)$$

si cette intégrale est définie, $f \star g(x) = 0$ sinon.

3) Montrer que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f \star g|\, d\lambda_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, d\lambda_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g|\, d\lambda_n.$$

4) On définit $g \star f$ en échangeant les rôles de f et g dans la définition de h. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $f \star g = g \star f$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $R > 0$ et $B_n(R)$ la boule de rayon R de $\mathbb{R}^n$ pour la topologie euclidienne :

$$B_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2 \right\}.$$

On note λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et

$$b_n(R) = \lambda_n(B_n(R)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_n(R)}(x_1, \ldots, x_n)\, d\lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$$

le volume de cette boule.

1) Montrer que $b_n(R) = R^n b_n(1)$. On pourra s'aider d'un changement de variable. On raccourcit $b_n(1)$ en b_n.
2) Calculer b_1, b_2 et b_3. On pourra s'aider de changements de variables.
3) Pour $n \geq 3$, établir une relation de récurrence entre b_n et b_{n-2}. On pourra remarquer que

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1) \Longleftrightarrow (0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_3^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2).$$

En déduire la valeur de b_n puis celle de $b_n(R)$ en fonction de n et R.

Exercice 38 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note AX la produit matriciel. On note également $(.|.)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et λ^n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Calculer

$$I(A) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(AX|X)}\, d\lambda^n(X).$$

TD7 : Espaces L^p

Exercice 39 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$$

1) Montrer que $f \in L^1(]0,1])$.
2) Soit $p \in]1,+\infty]$. Montrer que $f \notin L^p(]0,1])$.
3) Soit $p \in [1,+\infty]$. Montrer que $f \in L^p([1,+\infty[)$.

Exercice 40 Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$. Soit également $1 \leq p < q < +\infty$.
1) Montrer que

$$L^\infty(E) \subset L^q(E) \subset L^p(E) \subset L^1(E).$$

2) Montrer sur un exemple que l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$ est indispensable.
3) La première question permet de définir l'injection :

$$\begin{array}{rcl} i : L^q & \to & L^p \\ f & \mapsto & f \end{array}$$

Montrer que cette injection est continue pour les normes $\|.\|_q$ et $\|.\|_p$.

Exercice 41 Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré, $p \in [1,+\infty]$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(E,\mathcal{T},\mu)$. On suppose que
(i) $(f_n)_n$ converge simplement presque partout vers une fonction f.
(ii) $(f_n)_n$ converge au sens L^p vers une fonction g.
Montrer que $f = g$ presque partout.

Exercice 42 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n\mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}(x).$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge presque partout vers la fonction nulle.
2) Etudier la convergence de la suite $(f_n)_n$ dans L^p pour $p \in [1,+\infty]$.

Exercice 43 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $a(n)$ l'unique entier tel que

$$2^{a(n)} \leq n \leq 2^{a(n)+1} - 1$$

et f_n la fonction définie sur $[0,1[$ par

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n2^{-a(n)}-1,(n+1)2^{-a(n)}-1[}(x).$$

1) Représenter f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.
2) Soit $p \in [1,+\infty[$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge dans $L^p([0,1[)$ vers la fonction nulle.

3) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, la suite $f_n(x)$ n'admet pas de limite.

Exercice 44 *Produit scalaire sur L^2 et polynômes orthogonaux*
Soit I un intervalle ouvert non-vide de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}(I)$. On choisit une fonction $\omega : I \to]0,+\infty]$ mesurable et on note μ la mesure de densité ω par rapport à la mesure de Lebesgue λ.
On rappelle que μ est une mesure définie pour $A \in \mathcal{B}(I)$ par

$$\mu(A) = \int_A \omega(x) d\lambda x.$$

Une fonction $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable est μ-intégrable si et seulement si $f.\omega$ est λ-intégrable et que dans ce cas :

$$\int_I f\, d\mu = \int_I f\omega\, d\lambda.$$

On travaille sur l'espace vectoriel $L^2 = L^2(I, \mathcal{B}(I), \mu)$.

1. Le but de cette question est de définir un produit scalaire sur L^2.
   (a) Soit $f, g \in L^2$. Montrer que $fg \in L^1$. On pourra commencer par déterminer le conjugué de 2 puis utiliser Hölder.
   (b) Soit $f, g \in L^2$. On définit $\langle f, g\rangle$ par

   $$\langle f, g\rangle = \int_I fg\, d\mu.$$

   Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.
   (c) Quelle est la norme associée à $\langle ., .\rangle$?
2. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme x^n appartient à L^2. Par conséquent, on a également $\mathbb{R}[X] \subset L^2$.
   (a) Donner un exemple d'intervalle I et de poids ω pour lesquels cette assertion est vérifiée.
   (b) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_n$ vérifiant :
   - P_n est unitaire pour tout n.
   - $\deg(P_n) = n$ pour tout n.
   - $i \neq j \Longrightarrow \langle P_i, P_j\rangle = 0$.

   On pourra commencer par déterminer P_0 puis construire les P_n par récurrence.
   (c) Montrer que les polynômes $(P_n)_n$ vérifient, pour $n \geq 2$, la relation de récurrence

   $$P_n(x) = \left(x - \frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|_2^2}\right) P_{n-1}(x) - \frac{\|P_{n-1}\|_2^2}{\|P_{n-2}\|_2^2} P_{n-2}(x).$$

   On pourra commencer par remarquer que $P_n - xP_{n-1}$ est un polynôme de degré $n-1$, donc combinaison linéaire des $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_0$.
   (d) Montrer que pour tout n, P_n admet n racines distinctes dans I.
3. **Exemples** Pour $I =]-1,1[$ et $\omega(x) = 1$, on obtient les polynômes de Legendre L_n :

$$L_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Pour $I =]-1,1[$ et $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient les polynômes de Tchebychev T_n :

$$T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \arccos x).$$

Pour $I =]0,+\infty[$ et $\omega(x) = e^{-x}$, on obtient les polynômes de Laguerre L_n :

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Pour $I = \mathbb{R}$ et $\omega(x) = e^{-x^2/2}$, on obtient les polynômes de Hermite H_n :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}).$$

Correction des exercices

Correction 1 Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $\{f_k < a\} = E$ si $a > k$, $\emptyset$ si $a < -k$ et $\{f < a\}$ si $-k \leq a \leq k$.

Correction 2 Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $\{\mathbb{1}_A < a\} = E,\ \emptyset,\ {}^cA$ selon les valeurs de a.
Choisir $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{T}$ et considérer $f = 2\mathbb{1}_A - 1$.

Correction 4

1. On a $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = F =: \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Les F_n sont mesurables, et F aussi. On a aussi $F_{n+1} \subset F_n$ et $\mu(F_0) = \mu(\cup A_k) \leq \sum \mu(A_k) < \infty$. Du coup
$$0 \leq \mu(F) = \lim \mu(F_n) \leq \lim \sum_{k\geq n} \mu(A_k) = 0.$$
2. Soit $A_n^a = \{|f_n - f| > a\}$ et F^a leur limsup. Par hypothèse et Borel-Cantelli, on a $\mu(F^a) = 0$ pour tout $a > 0$.
Soit maintenant $G = \{x \in E,\ f_n(x) \text{ ne converge pas vers } f(x)\}$ et $x \in G$. Alors
$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, |f_n(x) - f(x)| > 1/p.$$
Autrement dit $G \subset \cup_{p\in\mathbb{N}^*} F^{1/p}$ qui est mesurable de mesure nulle.

Correction 6 On tombe sur la mesure de comptage, puis sur $\delta_{g(a)}$.

Correction 7 Classique. Commencer par supposer que f est positive. Si f est une indicatrice, c'est facile. Si elle est étagée, ce n'est pas beaucoup plus dur. Si elle est positive quelconque, l'approximer de manière croissante par des étagées, utiliser Beppo-Levy et ça passe. Si f est de signe quelconque, écrire $|f| = f^+ + f^-$.

Correction 8 1) $\nu(\emptyset = 0)$, l'additivité est facile.

2) Faire $h = \mathbb{1}_A$, puis h étagée, puis enfin h quelconque positive avec approximation par des étagées et Beppo-Levy.
3) Commencer par f positive : f est une indicatrice, puis une étagée, puis une positive quelconque. Si le signe de f est quelconque, faire $|f| = f^+ + f^-$.

Correction 9 Ecrire $\mathbb{Q} = \{r_0, r_1, ...\}$, poser
$$I_n = \left]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right[$$
et $U = \bigcup I_n$.

Correction 10 1) Réciproque fausse :
$$U \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left]p - \frac{1}{2^{n+1}}, p + \frac{1}{2^{n+1}}\right[$$

2) Réciproque fausse : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Correction 11 1) Soit $x \in F + q \cap F + r$. Soit $y = x - q \in F$ et $z = x - r \in F$. On a $y \neq z$ et $y - z = q - r \in \mathbb{Q}$, donc $\overline{y} = \overline{z}$, c'est absurde.

2) Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, on a $F + q \subset [-1, 2]$, cela montre la deuxième inclusion.
Soit $x \in [0, 1[$. Il faut montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ tel que $x - q \in F$. Appelons y l'élément de F tel que $\overline{x} = \overline{y}$. Alors $q = x - y \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ convient. Cela montre la première inclusion.

3) Supposons F borélienne, alors tous les $F + q$ le sont aussi, et leur réunion dénombrable également. La question précédente donne alors

$$1 \leq \lambda \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} F + q \right) \leq 3.$$

Mais cette réunion est disjointe, donc

$$\lambda \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} F + q \right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda (F + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda (F) \, .$$

Il y a une infinité de terme dans cette somme. Elle vaut donc 0 si $\lambda(F) = 0$ ou $+\infty$ si $\lambda(F) > 0$. Dans tous les cas, c'est une contradiction.

Correction 12 Disons que f et g sont étagées et prennent les valeurs a_i, $i = 1, \ldots, n$ et b_j, $j = 1, \ldots, p$ sur les ensembles A_i et B_j. Remarquons que $(A_i)_i$ et $(B_j)_j$ forment des partitions de E. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{p} b_j \mu(B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{p} \mu(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^{p} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(B_j \cap A_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}(A_i) + \sum_{j=1}^{p} b_j \mathbb{1}(B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^{p} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(B_j \cap A_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_i + b_j) \mathbb{1}(A_i \cap B_j),
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\int_E f + g \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Pour passer à f, g mesurables positives quelconques, il suffit de considérer (u_n) et (v_n) des suites croissantes de fonctions positives étagées telles que $u_n(x) \to f(x)$ et $v_n(x) \to g(x)$ (en croissant donc) pour tout $x \in E$. Pour tout n on a alors $\int u_n + v_n \, d\mu = \int u_n \, d\mu + \int v_n \, d\mu$. En passant à la limite dans cette égalité et en utilisant Beppo-Levi, on trouve $\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

Correction 13 Soit F_p la somme partielle $F_p(x) = \sum_{n=0}^{p} f_n(x)$. D'après l'exercice précédent on a

$$\int F_p \, d\mu = \sum_{n=0}^{p} \int f_n \, d\mu.$$

De plus la suite de fonction $(F_p)_p$ est une suite croissante (car les f_n sont positives) de fonctions mesurables positives telles que $F_p(x) \to F(x)$ pour tout $x \in E$. Le théorème de convergence monotone donne alors que F est mesurable (elle est aussi positive) et que :

$$\int_E F \, d\mu = \lim_{p \to \infty} \int_E F_p \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Correction 14 1) Par intégration terme à terme d'une série de fonctions positives on obtient :

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(n) \mathbb{1}_{\{n\}}(x) \, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\mu(\{n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Les séries classiques sont des intégrales de Lebesgue.

2) Soit f_n la suite de fonctions positives sur $\mathbb{N}$ définies par $f_n(p) = u_{n,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu.$$

La première question appliquée à chaque membre de cette égalité donne le résultat.

3) Les termes sont positifs, on échange :

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

par téléscopage. On ne sait pas grand chose sur les valeurs des sommes de Riemann $\sum 1/n^p$ pour p entier ≥ 2, mais on peut calculer la somme de ces sommes !

Correction 15 1) On a, lorsque n tend vers l'infini,

$$(1 - x^2/n)^n = \exp(n \ln(1 - x^2/n)) \sim \exp(-x^2).$$

Pour la croissance, il faut pousser le développement à l'ordre 3, le calcul suivant NE SUFFIT DONC PAS :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= (n+1)\left(-\frac{x^2}{n+1}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{(n+1)^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)-n\left(-\frac{x^2}{n}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{n^2+n}x^4+o(\frac{1}{n})=\frac{x^4}{2n}\left(\frac{1}{n+1}+\varepsilon(n)\right).\end{aligned}$$

ce qui, encore une fois, ne suffit pas. Faire le DL à l'ordre 3 et ça ira.

2) Les fonctions f_n sont positives grâce à l'indicatrice. Elles convergent simplement vers la fonction demandée : pour x fixé, il suffit de prendre n assez grand pour que $\sqrt{n} > x$ et appliquer la question précédente. Pour la croissance (à partir d'un certain rang) il suffit de voir que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a bien

$$\left(1-\frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1}\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n+1}]} \geq \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n}\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}$$

par la question précédente et en faisant un peu attention aux indicatrices.

3) La question précédente assure que l'on peut utiliser le théorème de convergence monotone :

$$\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx,$$

c'est le résultat demandé.

4) Par le changement de variable $x/\sqrt{n} = \sin\theta$, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \sqrt{n}I_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2(2n+1)}}$$

Donc $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ et $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Correction 16 On peut seulement invoquer Fatou :

$$\int_E f\,d\mu = \int_E \text{liminf} f_n\,d\mu \leq \text{liminf}\int_E f_n\,d\mu \leq M.$$

Correction 17 **Convergence monotone** : la suite de fonctions $(f_0 - f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives (pour la croissance, on utilise la décroissance de la suite de départ, pour la positivité aussi !) qui converge presque partout vers $f_0 - f$. Beppo-Levi donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_0 - f_n\,d\mu = \int_E f_0 - f\,d\mu.$$

Du fait que $\int_E f_0\,d\mu < +\infty$, on peut retrancher cette quantité de chaque membre de l'égalité et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

(c'est indispensable de dire cela puisque $+\infty + 4 = +\infty = +\infty + 3$ et pourtant $4 \neq 3$. Cette quantité est finie puisque $0 \leq f \leq f_0$ et f_0 est intégrable. **Convergence dominée** : par décroissance et positivité de la suite, on a $|f_n| = f_n \leq f_0$ pour tout n. Or f_0 est intégrable par hypothèse. La convergence dominée donne donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

On ne peut pas supprimer l'hypothèse de finitude : $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$.

Correction 18 1) Sur $[0,1]$, $f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$. En développant la puissance n, on remarque que $f_n(x) \leq 1$ pour tout x. La fonction constante est intégrable sur $[0,1]$, de plus $f_n(x) \to 0$ pour $x > 0$, donc presque partout. La convergence dominée donne que la limite est nulle.

2) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = f(x)e^{-n\sin^2 x}$. On a $|f_n| \leq |f|$ qui est intégrable par hypothèse. De plus $f_n(x) \to 0$ sauf si $x \in \pi\mathbb{Z}$. La mesure de ce dernier ensemble étant nulle, la suite (f_n) converge presque partout vers la fonction nulle et la convergence dominée montre que la limite des intégrales est nulle.

3) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n](x)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-\frac{x}{2}}$. De plus, pour tout $x \in [0,n]$, on a $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$. La suite est donc majorée par sa limite qui est intégrable. La convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 2.$$

4) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n](x)} \ln x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. On $\ln(1-t) \leq -t$ pour $t < 1$. Donc $0 \leq (1 - x/n)^n \leq e^{-x}$ pour $0 < x < n$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f_n(x)| \leq |\ln x| e^{-x}.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \ln x e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. La convergence dominée donne donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\, dx = \int_0^{\infty} \ln x e^{-x}\, dx.$$

Pour la constante d'Euler γ, il suffit de calculer les intégrales de gauche en posant $y = (1 - x/n)$ puis par partie en choisissant finement $(y^{n+1} - 1)/(n+1)$ comme primitive de y^n :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \ln x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx &= n \int_0^1 \ln(n(1-y))y^n\, dy \\
&= \frac{n \ln n}{n+1} + \left[\frac{y^{n+1} - 1}{n+1} \ln(1-y)\right]_0^1 + n \int_0^1 \frac{y^{n+1} - 1}{(n+1)(1-y)}\, dy \\
&= \frac{n \ln n}{n+1} - \frac{n}{n+1} \int_0^1 1 + y + \cdots + y^n\, dy = \frac{n}{n+1} (\ln n - H_{n+1})
\end{aligned}$$

On en déduit que $\gamma := \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln n = -\int_0^{\infty} \ln x e^{-x}\, dx.$.

Correction 19 On note $f_n(x)$ l'intégrande. Si $f(x) = 0$, alors $f_n(x) = 0$. Sinon on a

$$f_n(x) \sim n^{1-\alpha} f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left| \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \end{array} \right.$$

Noter que dans le deuxième cas, on utilise le fait que f ne prend pas la valeur $+\infty$. Trois cas s'imposent donc.

1er cas : $\alpha = 1$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f. De plus, grace à l'inégalité $\ln(1+t) \leq t$, on a

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \leq n\frac{f(x)}{n} = f(x).$$

Comme f est une fonction intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominé. On obtient $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.
2ème cas : $\alpha > 1$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. De plus, grace à l'inégalité indiquée dans l'énoncé, on a

$$|f_n(x)| = f_n(x) =\leq n\alpha \ln\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right) \leq \alpha f(x).$$

La fonction αf étant encore intégrable, la convergence dominée donne $\int f_n \, d\mu \to 0$.
3ème cas : $0 < \alpha < 1$. A x fixé, $f_n(x)$ converge vers 0 si $f(x) = 0$ et vers $+\infty$ sinon. Autrement dit, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto +\infty \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}}$.
Notons que la mesure de $\{f \neq 0\}$ n'est pas nulle, car sinon

$$\int_E f \, d\mu = \int_{\{f\neq 0\}} f \, d\mu + \int_{\{f=0\}} f \, d\mu = 0 + 0 = 0$$

ce qui est exclut par l'énoncé.
Ici, on ne peut appliquer que Fatou à la suite (f_n), mais cela va suffire :

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Or le membre de gauche vaut

$$\int_E +\infty \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} \, d\mu = 0 \times \mu(\{f = 0\}) + \infty \times \mu(\{f \neq 0\}) = +\infty.$$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu = +\infty$.

Correction 20 1) On trouve $\int f_n dx = 1 \neq 0$. Si on omet l'hypothèse de domination, le théorème n'est plus valable.

2) On trouve $\int f_n dx = \ln(1 + 1/n) \to 0$. La limite des intégrales coincide donc avec l'intégrale de la limite. Ensuite, si g convient et $x \in \mathbb{R}$, on a en particulier $g(x) \geq f_{E[x]}(x) = 1/x$ avec $E[.]$ la partie entière. Donc g n'est pas intégrable. On ne peut donc pas majorer les f_n par une fonction intégrable. La réciproque de convergence dominée est fausse.

Correction 21 Notons $B = \{f = +\infty\}$. On a $\mu(B) = 0$ car

$$+\infty > \int_E |f| \, d\mu \geq \int_B |f| \, d\mu = 0\mu({}^cB) + \infty\mu(B).$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{T}$. On a

$$\int_A |f| \, d\mu = \int_{A\cap\{|f|\leq n\}} |f| \, d\mu + \int_{A\cap\{|f|>n\}} |f| \, d\mu \leq n\mu(A) + \int_{A\cap\{|f|>n\}} |f| \, d\mu.$$

Occupons nous du deuxième terme et appelons f_n l'intégrande. On a $|f_n| \leq |f|$ qui est intégrable par hypothèse et $f_n(x) \to |f(x)|\mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ à x fixé. La convergence dominée assure donc la convergence de l'intégrale vers $\int_{A\cap B} |f(x)| \, d\mu = 0$ car B est de mesure nulle. Soit alors n_0 telle que l'intégrale soit plus petite que $\varepsilon/2$ et $\eta = \frac{\varepsilon}{2n_0}$. On alors, pour tout $A \in \mathcal{T}$ telle que $\mu(A) < \eta$:

$$\left|\int_A f \, d\mu\right| \leq \int_A |f| \, d\mu \leq n_0\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Correction 22 Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que pour $n > N$, on ait

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(E)}.$$

Alors pour $n > N$, on a $\int_E |f_n - f|\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{\mu(E)}\mu(E) = \varepsilon$.
Le résultat n'est plus vrai si on enlève l'hypothèse : sur $\mathbb{R}$ avec Lebesgue, considérer $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,+\infty[}$.

Correction 23 1) Il suffit d'écrire :

$$\left|\int_E f_n\, d\mu - \int_E f\, d\mu\right| \leq \int_E |f_n - f|\, d\mu$$

et

$$\left|\int_E |f_n|\, d\mu - \int_E |f|\, d\mu\right| = \left|\int_E |f_n| - |f|\, d\mu\right| \leq \int_E ||f_n| - |f||\, d\mu \leq \int_E |f_n - f|\, d\mu$$

(inégalité triangulaire renversée)

2) Les fonctions g_n sont positives, on ne peut faire que Fatou. Notons que g_n converge simplement vers $2|f|$ presque partout par hypothèse. On obtient :

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} g_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E g_n\, d\mu,$$

autrement dit :

$$\int_E 2|f|\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E |f| + |f_n| - |f - f_n|\, d\mu = 2\int_E |f|\, d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu.$$

La deuxième égalité provenant de l'hypothèse de cette question. Donc

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu \leq 0$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

3) Nous venons de montrer que, sous les hypothèses de l'exercice :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu.$$

4) Il va falloir choisir des fonctions qui change de signe, sinon les résultats précédents assurent que de telles fonctions n'existent pas. Considérons $f_n = \frac{1}{n}\left(\mathbb{1}_{[0,n]} - \mathbb{1}_{[-n,0]}\right)$. Les f_n sont intégrables, converge vers 0 (qui est intégrable). On a aussi :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu = 0 \longrightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\mu$$

et pourtant

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0|\, d\mu = 2.$$

Correction 24 1) Il n'y a pas de problèmes d'intégration en $t = 0$. Puisque $x \geq 0$, on a de plus que l'intégrande, qui est continu en x, est majoré par $1/(1 + t^3)$, qui est intégrable en $+\infty$. Cela montre à la fois que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) On pourrait montrer qu'elle est C^1 et étudier la dérivée, mais il faut des fois savoir revenir aux sources. Soit $x \leq y$ deux réels positifs. Alors, pour tout $t > 0$, on a $\frac{1}{1+y^3+t^3} \leq \frac{1}{1+x^3+t^3}$, d'où $f(y) \leq f(x)$.

3) Pour calculer $f(0)$, on fait le changement de variable $u = 1/t$:

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^3} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1 + u^3} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 - u + 1} du - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^3} du.$$

Si on ne voit pas l'astuce $u = u + 1 - 1$ qui exprime $f(0)$ en fonction de lui-même, on peut décomposer en élément simple en faisant bien attention et ça devrait passer. Dès lors :

$$2f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 - u + 1} du = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

après maniement correct de la forme canonique et des Arctan, sous reserve des erreurs de calculs.

Pour montrer que la la limite en $+\infty$ vaut 0 il suffit de remarquer que

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + t^3} = \frac{1}{x^2} f(0),$$

après changement de variable $u = tx$.

Correction 25 1) La localité de la continuité va bien servir. Soit $K \subset [a, b]\mathbb{R}_+^*$ un compact avec $0 < a < b$. A t fixé, la fonction $x \mapsto \frac{\cos t}{t+x}$ est continue. De plus, pour $x \in K$ fixé, on a $\frac{\cos t}{t+x} \leq \frac{1}{t+a}$ qui est une fonction intégrable sur $[0, \pi/2]$. Donc f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On pourrait à nouveau montrer qu'elle est C^1 et étudier la dérivée. Mais si $x \leq y$ alors $\frac{\cos t}{t+y} \leq \frac{\cos t}{t+x}$ et $f(y) \leq f(x)$. D'où la décroissance.

3) Pour la limite en $+\infty$, il suffit d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + t/x} dt \leq \frac{\pi}{2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour la limite en 0, c'est un peu plus délicat :

$$f(x) \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{x + t} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x + t} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\pi/4 + x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

4) En encadrant le dénominateur, on a

$$\frac{1}{x + \pi/2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt.$$

On déduit que $f(x) \sim \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt}{x}$ en $+\infty$.

En encadrant correctement le numérateur, on obtient l'équivalent en 0 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - t^2/2}{x + t} dt \leq f(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x + t} dt.$$

Pour x voisin de 0, on a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x+t} dt = \ln \frac{\pi/2+x}{x} \sim -\ln 2x/\pi$. De plus $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-t^2}{x+t} dt$ est bornée, elle est donc $o(\ln x)$. On obtient que $f(x) \sim -\ln 2x/\pi$ en 0.

Correction 26 1) La dérivée en x de l'intégrande vaut $-2xe^{-x^2(1+t^2)}$. Pour $K \subset [-a, a]$ un compact de $\mathbb{R}$, la valeur absolue de cette dérivée est majorée par $2a$ qui est bien une fonction indépendante de x et intégrable sur $[0, 1]$. On obtient ainsi la dérivabilité de f et le fait que

$$f'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)}\, dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2}\, dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La continuité de f' résulte du même argument.

2) On a $g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.. Pour $x = 0$ on a l'égalité demandé. Pour $x \neq 0$, on fait le changement de variable $u = t/x$ dans l'expression de g' pour conclure.

3) De la question précédente, on déduit que $f + g$ est constante sur $\mathbb{R}$. Cette constante vaut $f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$.

4) On a

$$|f(x)| = e^{-x^2} \left| \int_0^1 \frac{e^{-(xt)^2}}{1+t^2} dt \right| \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

5) On en déduit que $g(x)$ tend vers $\frac{\pi}{4}$ quand x tend vers l'infini, autrement dit

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Correction 27 1) On majore la dérivée (en x) de l'intégrande par te^{-t^2} pour conclure à la dérivabilité.

2) On obtient $f'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(tx)\, dt$. On intègre f par partie pour obtenir l'équation différentielle, attention à $x = 0$ qu'il vaut mieux traiter à part.

3) L'équation différentielle se résoud en $f(x) = ce^{-x^2}$. La constante c vaut $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

Correction 28 1. Les hypothèses sont cruciales. Tout d'abord les constantes sont intégrables puisque $\mu(E) < +\infty$. Ensuite, il suffit de remarquer que

$$|\ln f| \leq \sup(f, |\ln \varepsilon|) \text{ et } |f^\alpha| \leq \sup(1, f) \text{ car } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

2. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) > 0$. La fonction $\alpha \mapsto f(x)^\alpha$ est donc dérivable de dérivée $\ln f(x).f(x)^\alpha$. De plus, pour $\alpha \in [0, 1/2[$, cette dérivée vérifie :

$$\begin{aligned} |\ln f(x).f(x)^\alpha| &= |\ln f(x)| \left(\mathbb{1}_{\{f \leq 1\}} + \mathbb{1}_{\{f>1\}} \right) \times f(x)^\alpha \left(\mathbb{1}_{\{f\leq 1\}} + \mathbb{1}_{\{f>1\}} \right) \\ &\leq \left(|\ln \varepsilon| \mathbb{1}_{\{f\leq 1\}} + \sqrt{f(x)} \mathbb{1}_{\{f>1\}} \right) . \left(1.\mathbb{1}_{\{f\leq 1\}} + \sqrt{f(x)} \mathbb{1}_{\{f>1\}} \right) \\ &\leq |\ln \varepsilon| \mathbb{1}_{\{f\leq 1\}} + f(x) \mathbb{1}_{\{f>1\}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\ln t \leq \sqrt{t}$ pour tout $t \geq 1$. Le membre de droite est bien une fonction de x indépendante de α et intégrable sur E. On obtient que F est dérivable sur $[0, 1/2[$ (avec la même technique, on aurait pu pousser jusqu'à $[0, 1 - 1/e[$...) et que $F'(\alpha) = \displaystyle\int_E \ln f.f^\alpha\, d\mu$.

3. Notons $G(\alpha)=\ln(\frac{1}{\mu(E)}F(\alpha))$. Le logarithme de la quantité dont on veut calculer la limite vaut $\frac{1}{\alpha}(G(\alpha)-G(0)$. Il tend donc vers $G'(0)=F'(0)/F(0)$. D'où le résultat

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f^\alpha\,d\mu\right)^{1/\alpha}=\exp\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_X \ln f\,d\mu\right).$$

Correction 29 Notons $g(t,x)$ l'intégrande. Il est positif.

1) Soit $x>0$. En $t=0$, on a $g(t,x)\sim\frac{1}{t^{1-x}}$ qui est bien intégrable puisque $1-x<1$. En $+\infty$, on a $t^2g(t,x)\to 0$, donc $t\mapsto g(t,x)$ est intégrable en $+\infty$ par le critère de Riemann. La fonction Γ est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $k\in\mathbb{N}$. La fonction $x\mapsto\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(t,x)=(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable (en t) sur $]0,+\infty[$ par les critères de Riemann : soit $\alpha>0$ vérifiant $1>\alpha>1-x$, on a

$$t^\alpha(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{1}$$
$$t^2(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$

Soit $K\subset[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ un compact avec $0<a<b$. Il faut maintenant vérifier que, pour tout $x\in K$, la valeur absolue de cette dérivée est bornée par une fonction intégrable (en t) sur $]0,+\infty[$ indépendante de x. Pour cela, remarquons que pour tout $t\in]0,+\infty[$ et tout $x\in K$, on a $t^{x-1}\le t^{a-1}+t^{b-1}$; en fait t^{x-1} est plus petit que l'un des deux termes de droite selon la position de t par rapport à 1, mais dans tous les cas, t^{x-1} est majoré par la somme des deux. Dès lors

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(t,x)\right|\le|\ln t|^k\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)e^{-t}.$$

Ce majorant est bien indépendant de x et intégrable sur $]0,+\infty[$ à nouveau par les critères de Riemann.

On montre ainsi que Γ est continue ($k=0$), puis qu'elle est dérivable ($k=1$), puis qu'elle est C^∞ par induction.

3) De la question précédente on déduit que pour tout $x>0$

$$\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^2t^{x-1}e^{-t}\,dt\ge 0,$$

d'où la convexité.

4) On intégre par partie l'expression de $\Gamma(x+1)$:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}\,dt=\left[-t^xe^{-t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}xt^{x-1}e^{-t}\,dt=x\Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(1)=1$, on déduit par récurrence que $\Gamma(n)=(n-1)!$.

5) Le changement de variable donne le résultat.

6) Posons $f_n(u)=\exp\left(n\ln\left(1+u/\sqrt{n}\right)-u\sqrt{n}\right)\mathbb{1}_{]-\sqrt{n},+\infty[}(u)$. Un DL(2) du logarithme montre que $f_n(u)$ converge vers $e^{-u^2/2}$. Pour la domination, il suffit de voir que :

$$\begin{aligned}&\text{pour } -\sqrt{n}\le u\le 0, && n\ln(1+u/\sqrt{n})-u\sqrt{n}\le -u^2/2\\ &\text{pour } u\ge 0, && n\ln(1+u/\sqrt{n})-u\sqrt{n}\le -u+\ln(1+u).\end{aligned}$$

La fonction $u\mapsto e^{-u^2/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u)+(1+u)e^{-u}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de n, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et écrire :

$$\Gamma(n+1)\frac{e^n}{n^n\sqrt{n}}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}}e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}.$$

7) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $n_x! = x(x+1)\dots(x+n)$.

   a) Pour $0 < t < n$, on a $(1-t/n)^n \leq e^{-t}$ par l'inégalité $\ln(1+a) \leq a$ pour tout $a > -1$. Le théorème de convergence dominé s'applique et montre le résultat.

   b) Commençons par le changement de variable $u = t/n$:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du.$$

   Ensuite, une intégration par partie donne

$$\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \frac{1}{x}\left[(1-u)^n u^x\right]_0^1 + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x\,du.$$

   Le crochet est nul car $x > 0$ et $n > 0$. En itérant n fois cette intégration par partie, on obtient :

$$\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \frac{n(n-1)\dots 2}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^1 u^{x+n-1}\,du = \frac{n!}{n_x!}$$

   c) On obtient donc $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{n_x!} > 0$. D'où

$$n_x! \sim \frac{n^{n+x}\sqrt{2\pi n}}{e^n \Gamma(x)}$$

Correction 30 1) La question est de savoir si $\int_A |f|\,d\lambda < +\infty$. La fonction f est positive donc la valeur absolue est inutile et le theorème de Tonneli permet d'écrire (en ayant deviné le bon sens du premier coup !) :

$$\begin{aligned}\int_A |f|\,d\lambda &= \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx\right)dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y}dy = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} < +\infty.\end{aligned}$$

Cela montre que f est intégrable.

2) En appliquant à nouveau Tonelli (ou Fubini maintenant que l'on a montré que f est intégrable), on obtient :

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \int_0^{+\infty}\left(\int_a^b e^{-xy}dy\right)dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

Correction 31 1) La fonction à intégrer est positive. On peut donc appliquer Fubini-Tonelli et intégrer dans l'ordre souhaité, le suivant étant le plus simple :

$$\begin{aligned}\int_D \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}\,d\mu &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}dx\right)dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{y}(1+y)}dy \quad (\text{chgt } t = x\sqrt{y}) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{2} \quad (\text{chgt } t = \sqrt{y})\end{aligned}$$

Au passage, on a montré que la fonction est intégrable sur D et on a calculé la valeur de son intégrale.

2) On intègre maintenant dans l'autre sens :

$$\int_D \frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}\,d\mu = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}dy\right)dx$$

L'intégrale intermédiaire se calcule en décomposant en éléments simples et en prenant une borne finie que l'on fera ensuite tendre vers $+\infty$. On trouve :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}dy = \frac{2\ln x}{x^2-1}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$

De plus :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx.$$

Il suffit de faire le changement de variable $t=\frac{1}{x}$ dans la dernière intégrale pour voir que

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

3) On écrit :

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \int_0^1 -\ln x\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 -x^{2n}\ln x\,dx,$$

l'échange $\sum$ et $\int$ étant justifié car les fonctions sont positives. La dernière intégrale se calcule par partie et vaut $1/(2n+1)^2$. On conclut $\sum_{n=0}^{+\infty}1/(2n+1)^2=\pi^2/8$. Pour la deuxième série il suffit d'écrire

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

On déduit $\frac{3}{4}S=\pi^2/8$ et finalement $S=\pi^2/6$.

Correction 32 1) (a) La question est de savoir si $\int_{\mathbb{N}^2}|f|\,d\mu\otimes\mu<+\infty$. Le théorème de Tonelli permet d'écrire

$$\int_{\mathbb{N}^2}|f|\,d\mu\otimes\mu = \int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}}|f|\,d\mu\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|f(m,n)| = \sum_{n=0}^{+\infty}2=+\infty.$$

Donc f n'est pas intégrable.

(b) On trouve

$$\int\left(\int f(m,n)\,d\mu(m)\right)\,d\mu(n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\infty}f(m,n) = \sum_{n=0}^{+\infty}0=0$$

et

$$\int\left(\int f(m,n)\,d\mu(n)\right)\,d\mu(m) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}f(m,n) = 1+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}f(m,n)=1.$$

Ce résultat est compatible avec le théorème de Fubini. En effet, la fonction f n'est pas intégrable si bien qu'on ne donc pas appliquer Fubini. Par contre, il permet de conclure à nouveau que f n'est pas intégrable car si elle l'était, les intégrales itérées dans les deux sens seraient égales.

2) (a) La fonction $\varphi : (x,y) \mapsto x-y$ est continue, donc borélienne, sur $[0,1]^2$. De plus $D = \varphi^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$, donc D est un borélien.

(b) Soit y fixé. Commençons par calculer $\int \mathbb{1}_D(x,y)\,d\lambda(x)$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\mathbb{1}_D(x,y) = \mathbb{1}_{\{y\}}(x)$, par conséquent $\int \mathbb{1}_D(x,y)\,d\lambda(x) = \lambda(\{y\}) = 0$ puis $\int \left(\int \mathbb{1}_D(x,y)\,d\lambda(x)\right) d\mu(y$ 0.

Soit à nouveau $y \in [0,1]$ fixé. Calculons maintenant $\int \mathbb{1}_D(x,y)\,d\mu(x)$. De la même manière, on a $\int \mathbb{1}_D(x,y)\,d\mu(y) = \mu(\{y\}) = 1$ si bien que $\int \left(\int \mathbb{1}_D(x,y)\,d\mu(x)\right) d\lambda(y) = \int_{[0,1]} d\lambda = 1$.

Ici la fonction à intégrer est positive, donc on pourrait croire être en droit d'appliquer Tonelli, ce qui contradirait le résultat des calculs. Cependant, Tonelli n'est pas applicable car la mesure produit $\lambda \otimes \mu$ n'existe même pas du fait que μ n'est pas $\sigma-$finie : les seules parties de $[0,1]$ de mesure finies sont les parties finies. Donc une réunion dénombrable de parties de mesures finies sera au plus dénombrable, ce qui n'est pas le cas de $[0,1]$.

Correction 33 1) (a) La fonction f n'est pas continue (regarder la limite selon une droite $y = ax$, $|a| \neq 1$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2+\frac{1}{n})^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues, donc mesurables et convergent simplement vers f qui est donc mesurable.

(b) A y fixé, commençons par $\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx$. Pour $y = 0$, cette intégrale vaut $+\infty$. Pour $y \neq 0$ il n'y a pas de problème d'intégrabilité et

$$\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx = \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{-2}{1+y^2}$$

Donc $y \mapsto \int_{-1}^1 f(x,y)\,dx$ est égale presque partout à la fonction $y \mapsto \frac{-2}{1+y^2}$. Du coup

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \int_{-1}^1 \frac{-2}{1+y^2}\,dy = -\pi.$$

Pour les intégrales itérées dans l'autre sens, les calculs sont identiques au signe près et on trouve

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dy\right) dx = \pi.$$

(c) Si f était intégrable sur $[-1,1]^2$, le théorème de Fubini s'appliquerait et les intégrales itérées coïncideraient.

2) (a) g n'est toujours pas continue (la droite $x = y$ permet de s'en convaincre). La justification de la mesurabilité est la même que précédemment.

(b) A y fixé, commençons par $\int_{-1}^1 g(x,y)\,dx$. Pour $y = 0$, cette intégrale est nulle. Pour $y \neq 0$ il n'y a pas de problème d'intégrabilité et

$$\int_{-1}^1 g(x,y)\,dx = \left[\frac{-y}{2(x^2+y^2)}\right]_{x=-1}^{x=1} = 0.$$

Par conséquent

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 g(x,y)\,dx\right) dy = 0$$

et on trouve de même

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} g(x,y)\,dy\right)dx = 0.$$

(c) Cela ne signifie pas pour autant que g est intégrable sur $[-1,1]^2$. Pour cela il faut regarder si $\int_{[-1,1]^2} |g|\,d\mu < +\infty$ où $d\mu$ est la mesure produit des mesures de Lebesgue sur $[-1,1]$. Hors $|g|$ est une fonction positive, donc le théorème de Tonelli assure que

$$\int_{[-1,1]^2} |g|\,d\mu = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} |g(x,y)|\,dx\right)dy.$$

Commençons donc par $\int_{-1}^{1} |g(x,y)|\,dx$. Pour $y = 0$, cette intégrale est nulle. Pour $y > 0$ elle vaut

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{y|x|}{(x^2+y^2)^2}\,dx &= \int_{-1}^{0} -\frac{yx}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{yx}{(x^2+y^2)^2}\,dx \\
&= \left[\frac{y}{2(x^2+y^2)}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{-y}{2(x^2+y^2)}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2y} - \frac{y}{2(1+y^2)} + -\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2y^3} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}
\end{aligned}$$

Pour $y < 0$, le calcul est identique au signe près. Donc la fonction $y \mapsto \int_{-1}^{1} |g(x,y)|\,dx$ est égale presque partout à la fonction $y \mapsto \frac{1}{|y|} - \frac{|y|}{1+y^2}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} |g(x,y)|\,dx\right)dy &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{|y|} - \frac{|y|}{1+y^2}\,dy \\
&= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\,dy = +\infty
\end{aligned}$$

car $y \mapsto 1/y$ n'est pas intégrable en 0 (et $y \mapsto \frac{y}{1+y^2}$ l'est). La fonction g n'est donc pas intégrable sur $[-1,1]^2$. Cela montre que la réciproque de Fubini est fausse.

Correction 34 C'est une application de Tonelli, applicable car μ et Lebesgue sont σ-finies :

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(t)\,dt\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_E \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(t)\,d\mu(x)\,dt$$

Or, pour tout $t \geq 0$ fixé, on a $t \in [0,f(x)] \Leftrightarrow f(x) \geq t$, donc

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \geq t\})\,dt.$$

Correction 35 1) Il s'agit de déterminer si $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,d(\lambda\otimes\lambda)(x,y) < +\infty$. La valeur absolue est inutile et le changement de variable polaire permet d'écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(\lambda\otimes\lambda)(x,y) = \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[} e^{-r^2} r\,d(\lambda\otimes\lambda)(r,\theta).$$

Le théorème de Tonelli affirme maintenant que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(\lambda\otimes\lambda)(x,y) = 2\pi \int_0^{+\infty} re^{-r^2}\, dr = \pi.$$

la fonction f est donc intégrable et son intégrale est π.

Pour retrouver l'intégrale de Gauss, appliquons Tonelli directement à f :

$$\pi = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(\lambda\otimes\lambda)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy\right) dx.$$

Il vient $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

2) Il s'agit de déterminer si $\int_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|\, d(\lambda\otimes\lambda)(x,y) < +\infty$. La valeur absolue est inutile. On remarque que $(x^2+2xy+2y^2) = (x+y)^2+y^2$ d'où l'idée de considérer le changement de variable (linéaire)

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+y,y) \end{aligned}$$

Sa matrice (Jacobienne ou pas!) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut 1. De plus, on a $g = f\circ\varphi$. La formule de changement de variable s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (f\circ\varphi)(x,y)\, 1\, d(\lambda\otimes\lambda)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(\lambda\otimes\lambda)(x,y).$$

D'où, par la question précédente :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\, d(\lambda\otimes\lambda) = \pi.$$

Correction 36 1) La question est de savoir si $\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |h(x,y)|\, d(\lambda_n\otimes\lambda_n)(x,y) < +\infty$. Le théorème de Tonelli permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |h(x,y)|\, d(\lambda_n\otimes\lambda_n)(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, d\lambda_n(x)\right) d\lambda_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, d\lambda_n(x)\right) d\lambda_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, d\lambda_n \, . \int_{\mathbb{R}^n} |g|\, d\lambda_n < +\infty. \end{aligned}$$

Clarifions le passage de la première à la deuxième ligne : à y fixé, si on pose $\tau(x) = x-y$, alors $\int |f(x-y)|\, d\lambda_n(x) = \int |f\circ\tau(x)|\, d\lambda_n(x) = \int |f(x)|\, d\lambda_n^\tau(x)$ où λ_n^τ est la mesure image de λ_n par τ. Mais pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$, on a $\lambda_n^\tau(A) = \lambda_n(\tau^{-1}(A)) = \lambda_n(A+y) = \lambda_n(A)$ car la mesure de Lebesgue est invariante par translation. On a donc $\lambda_n^\tau = \lambda_n$ et l'égalité annoncée.

2) Le théorème de Fubini (applicable à h qui est bien intégrable), affirme que pour presque tout $x\in\mathbb{R}^n$, l'application $y\mapsto h(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

3) Le théorème de Fubini affirme également que $x \mapsto \int h(x,y)\,d\lambda_n(y) = f \star g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. De plus :

$$\begin{aligned}\int |f \star g(x)|\,d\lambda_n(x) &= \int \left| \int f(x-y)g(y)\,d\lambda_n(y) \right| d\lambda_n(x) \\ &\leq \int \int |f(x-y)g(y)|\,d\lambda_n(y)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,d\lambda_n \,.\, \int_{\mathbb{R}^n} |g|\,d\lambda_n\end{aligned}$$

par la première question.

4) Notons A l'ensemble négligeable en dehors duquel $f \star g(x)$ est définie par $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,d\lambda_n(y)$ et B l'ensemble négligeable en dehors duquel $g \star f(x)$ est définie par $\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,d\lambda_n(y)$. Il suffit de montrer que, en dehors de $A \cup B$ qui est encore négligeable, ces deux intégrales coïncident. Soit donc $x \notin A \cup B$. Soit φ l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto x - y,\end{aligned}$$

c'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice Jacobienne en tout point y de $\mathbb{R}^n$ est $-I_n$. De plus, $\varphi \circ \varphi(y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,d\lambda_n(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\varphi(y))f(\varphi(\varphi(y)))\,|\mathrm{Det}(-I_n)|\,d\lambda_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left((g.(f \circ \varphi)) \circ \varphi\right)(y)\,d\lambda_n(y)\end{aligned}$$

La formule de changement de variable donne alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} (g.(f \circ \varphi))(y)\,d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\,d\lambda_n(y)$$

Correction 37 1) On trouve $b_1 = 2$. Pour b_2 on passe en coordonnées polaires en utilisant le difféomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[&\to \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \\ (r,\theta) &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}$$

Sa matrice Jacobienne en un point (r,θ) vaut

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue de son déterminant est donc r. Le borélien $\mathbb{R}_- \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est de mesure nulle. La formule de changement de variable donne donc :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{B_2}(x,y)\,d\lambda(x)d\lambda(y) = \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[} \mathbb{1}_{B_2}(\varphi(r,\theta))rd\lambda(r)d\lambda(\theta).$$

On a $\mathbb{1}_{B_2}(\varphi(r,\theta)) = \mathbb{1}_{]0,1]}(r)$ et le théorème de Tonneli donne :

$$\int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[} \mathbb{1}_{B_2}(\varphi(r,\theta))rd\lambda(r)d\lambda(\theta) = 2\pi \int_0^1 r\,d\lambda(r) = \pi.$$

Pour b_3, on passe en coordonnées sphérique en utilisant le difféormorphisme

$$\begin{array}{rcl} \psi : U :=]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times]0,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \{0\}) \\ (r,\theta,\varphi) & \mapsto & (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi). \end{array}$$

Attention au fait que φ est l'angle entre l'axe des z et le vecteur OM. Sinon, on inverserait les cos et sin pour φ et on devrait définir pour $\varphi \in]-\pi/2,\pi/2[$. La matrice Jacobienne de ψ est facile à calculer et si on ne se trompe pas, la valeur absolue de son déterminant vaut $r^2 \sin\varphi$. Le borélien $\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \{0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^3$ et la formule de changement de variable donne

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{B_3}(x,y,z)\, d\lambda(x) d\lambda(y) d\lambda(z) = \int_U \mathbb{1}_{B_3}(\psi(r,\theta,\varphi)) r^2 \sin\varphi\, d\lambda(r) d\lambda(\theta) d\lambda(\varphi).$$

On a encore $\mathbb{1}_{B_3}(\psi(r,\theta,\varphi)) = \mathbb{1}_{]0,1]}(r)$ et le théorème de Tonneli donne :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{B_3}(x,y,z)\, d\lambda(x) d\lambda(y) d\lambda(z) = 2\pi \int_0^1 r^2\, d\lambda(r) \int_0^\pi \sin\varphi\, d\lambda(\varphi) = \frac{4}{3}\pi.$$

2) Soit $n \geq 3$. L'indication affirme que

$$\mathbb{1}_{B_n}(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{1}_{B_{n-2}(1-x_1^2-x_2^2)}(x_3,\ldots,x_n).\mathbb{1}_{B_2}(x_1,x_2).$$

Le théorème de Tonelli donne alors

$$b_n = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{B_2}(x_1,x_2) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \mathbb{1}_{B_{n-2}(1-x_1^2-x_2^2)}(x_3,\ldots,x_n)\, d\lambda^{n-2}(x_3,\ldots,x_n) \right) d\lambda^2(x_1,x_2).$$

La première question permet de calculer l'intégrale centrale :

$$b_n = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{B_2}(x_1,x_2)(1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n-2}{2}} b_{n-2}\, d\lambda^2(x_1,x_2).$$

Le changement de variable polaire sur $\mathbb{R}^2$ déjà utilisé donne maintenant

$$b_n = 2\pi b_{n-2} \int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}}\, dr = 2\pi b_{n-2} \left[-\frac{1}{n}(1-r^2)^{\frac{n}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n} b_{n-2}.$$

Si $n = 2p$ est pair, on trouve de proche en proche que

$$b_n = b_{2p} = \frac{(2\pi)^p}{2p(2p-2)\ldots 2} = \frac{1}{p!}\pi^p.$$

Finalement, pour $n = 2p$:

$$b_n(R) = \frac{1}{p!} R^n \pi^p.$$

Si $n = 2p+1$ est impair, on trouve de même que

$$b_n = b_{2p+1} = 2\frac{(2\pi)^p}{(2p+1)(2p-1)\ldots 3} = \frac{2^n p!}{n!}\pi^p.$$

Finalement, pour $n = 2p+1$:

$$b_n(R) = \frac{2^n p!}{n!} R^n \pi^p.$$

Correction 38 Il faut utiliser un peu d'algèbre : M est diagonalisable dans une base orthonormée. Disons que U est une matrice orthogonale qui réalise

$$^tUAU = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D$$

où les λ_i sont les valeurs propres (strictement positive) de A.
On remarque maintenant que $(AX|X) = {}^tXAX = ({}^tXU)D({}^tUX)$. Si on note $Y = {}^tUX$, on obtient donc que $(AX|X) = \sum \lambda_i y_i^2$. C'est une expression bien agréable pour ce produit scalaire. Cela pousse à considérer le changement de variable (linéaire)

$$\begin{array}{rcl} U : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ Y & \mapsto & UY \end{array}$$

Sa matrice (Jacobienne ou non) est U si bien que la valeur absolue de son déterminant est 1. La formule de changement de variable s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(AUY|UY)}\, 1\, d\lambda^n(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(AY|Y)}\, d\lambda^n(Y),$$

ou bien

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2}\, d\lambda^n(Y) = I(A).$$

Le théorème de Tonelli appliqué n fois assure maintenant que

$$I(A) = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i y_i^2}\, dy_i.$$

Par le changement de variable $t = \sqrt{\lambda_i} y_i$, chacune de ces intégrales vaut $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}$ et on trouve finalement

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(AX|X)}\, d\lambda^n(X) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\text{Det}(A)}}.$$

Correction 39 1) f est positive. Le changement de variable $y = 1/x$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y(1+\ln y)^2} dy \\ &= \left[-\frac{1}{1+\ln y}\right]_1^{+\infty} = 1 < +\infty. \end{aligned}$$

Donc $f \in L^1(]0,1]$.

2) Soit $1 < p < +\infty$. On a

$$\frac{1}{x|f(x)|^p} = (1 + |\ln x|)^{2p} x^{p-1} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $p > 1$. En d'autres termes $1/x = o(|f(x)|^p)$ quand $x \to 0$. Cela entraîne que $|f|^p$ n'est pas intégrable en 0, donc $f \notin L^p(]0,1])$.
Pour $p = +\infty$, il suffit de remarquer $f(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$, donc f n'est pas bornée, a fortiori pas dans $L^\infty(]0,1])$.

3) Pour $p=1$, on a comme précédemment $\int_1^{+\infty}|f(x)|dx = 1 < +\infty$ donc $f \in L^1([1,+\infty[)$. Pour $1<p<+\infty$, on a $|f(x)|^p \leq \frac{1}{x^p}$ qui est intégrable en $+\infty$, donc $f \in L^p([1,+\infty[)$. Pour $p=+\infty$, il suffit de remarquer que f est continue positive, décroissante. Donc $f(x) \leq f(1) = 1$ pour tout $x \in [1,+\infty[$, donc $f \in L^\infty([1,+\infty[)$.

Correction 40 1) Commençons par $L^\infty \subset L^q$. Soit $f \in L^\infty$ et M un majorant essentiel de $|f|$. Alors

$$\int |f|^q\, d\mu \leq M^q \mu(E) < +\infty.$$

Maintenant, pour $L^q \subset L^p$, prenons $f \in L^q$ et notons $A = \{x \in E, |f(x)| \leq 1\}$. On a

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^p\, d\mu &= \int_A |f(x)|^p\, d\mu + \int_{E\setminus A} |f(x)|^p\, d\mu \\ &\leq \mu(A) + \int_{E\setminus A} |f(x)|^q\, d\mu \\ &\leq \mu(A) + \|f\|_q^q < +\infty. \end{aligned}$$

2) Pour voir que $\mu(E) < +\infty$ est indispensable, plaçons nous sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue.
La fonction constante 1 est dans L^∞ mais n'est dans aucun des L^p.
Soit $1 \leq p < q < +\infty$. On a alors $1/p > 1/q$. Soit α vérifiant $1/p > \alpha > 1/q$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|)^\alpha}$ est dans L^q car $q\alpha > 1$ et n'est pas dans L^p car $p\alpha < 1$.

3) Il s'agit de montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in L^q$, on a $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$. L'idée est d'appliquer l'inégalité d'Hölder : pour r et r' conjugués on a

$$\|f\|_p^p = \int |f(x)|^p\, d\mu \leq \left(\int (|f(x)|^p)^r\ d\mu\right)^{\frac{1}{r}} . \left(\int 1^{r'}\, d\mu\right)^{\frac{1}{r'}}.$$

Pour se ramener à $\|f\|_q$, l'idée vient de faire en sorte que $rp = q$, donc de choisir $r = q/p$ qui est > 1. Notons r' son conjugué et Hölder devient

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_q^{\frac{q}{r}} \mu(E)^{\frac{1}{r'}}.$$

On a $q/r = p$ et en prenant la racine p-ième de cette inégalité on obtient bien :

$$\|f\|_p \leq \mu(E)^{\frac{1}{r'p}} \|f\|_q.$$

Correction 41 La convergence au sens L^p de $(f_n)_n$ vers g entraine la convergence simple et presque partout d'une sous suite, disons $(f_{n_k})_k$, vers g. Notons :
– A l'ensemble négligeable en dehors duquel $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand $n \to +\infty$.
– B l'ensemble négligeable en dehors duquel $f_{n_k}(x)$ converge vers $g(x)$ quand $k \to +\infty$.
Alors, en dehors de $A \cup B$, qui est encore négligeable, on obtient que la limite de $f_{n_k}(x)$ est à la fois $g(x)$ et $f(x)$, ce qui entraine $g(x) = f(x)$.

Correction 42 1) La convergence a même lieu partout.

2) Si $(f_n)_n$ convergeait dans L^p, ce serait nécessairement vers la fonction nulle. On a, pour $p \in [1,\infty[$, $\|f_n\|_p = \frac{n^p}{n(n+1)}$. Donc, si $p < 2$, il y a effectivement convergence dans L^p. Si $p \geq 2$, il n'y a pas convergence. Si $p = \infty$, on a $\|f_n\|_\infty = n$ et il n'y a pas non plus convergence.

Correction 43 1) A n donné, l'intervalle $[0,1[$ est découpé en $2^{a(n)}$ intervalles de longueur égale. A $a(n)$ constant le plateau formé par f_n se déplace d'intervalle en intevalle.

2) On a $\|f_n\|_p = 2^{-a(n)/p}$ qui tend bien vers 0 quand $n \to +\infty$.

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = \left\{[n2^{-k}-1,(n+1)2^{-k}-1[,\ 2^k \leq n < 2^{k+1}\right\}$ est une partition de $[0,1[$ en $2^k \geq 2$ intervalles.

Soit $x \in [0,1[$ fixé et $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique intervalle de P_k qui contient x. Appelons $n(k,x)$ son indice : $x \in [n(k,x)2^{-k}-1,(n(k,x)+1)2^{-k}-1[$. On obtient $f_{n(k,x)}(x) = 1$. De plus, pour $k' > k$, on a $n(k',x) > n(k,x)$. La suite $(f_n(x))_n$ prend donc la valeur 1 un nombre infini de fois (à chaque fois que n prendra les valeurs distinctes $n(k,x)$, $k \in \mathbb{N}^*$). Si la suite $(f_n(x))_n$ converge, c'est donc forcément vers 1.

De la même manière, pour chaque k on peut construire un $\overline{n}(k,x)$ tel que $f_{\overline{n}(k,x)}(x) = 0$. Si la suite $(f_n(x))_n$ converge, c'est forcément vers 0.

Correction 44 1. (a) Le conjugué de 2 est ... 2 ! L'inégalité de Holder appliqué à $|f|$ et $|g|$donne

$$\int_I |fg|\, d\mu \leq \left(\int_I |f|^2\, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_I |g|^2\, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(b) $\langle .,. \rangle$ est à valeur dans $\mathbb{R}$ par la question précédente. Il est bilinéaire par linéarité de l'intégrale, symétrique et défini positif car si $\langle f, f\rangle = 0$ alors $f = 0$ presque partout.

(c) La norme associée à $\langle .,. \rangle$ est $\|.\|_2$. Le produit scalaire définit donc la même topologie sur L^2 que celle de $\|.\|_2$.

2. (a) On peut prendre $I =]-1,1[$ et $w = 1$ ou $I = \mathbb{R}$ et $w(x) = e^{-x^2}$ par exemple.

(b) On souhaite définir des polynômes qui vérifient :
- P_n est unitaire pour tout n.
- $\deg(P_n) = n$ pour tout n.
- $i \neq j \Longrightarrow \langle P_i, P_j \rangle = 0$.

Sous ces conditions, on a nécessairement $P_0 = 1$. Soit $n \geq 1$. Supposons construits les $P_0, \ldots, P_{n-1}$ et construisons P_n. Remarquons que les $P_0, \ldots, P_{n-1}$ forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Puisque P_n doit être unitaire de degré n, il est alors nécessairement de la forme

$$P_n(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i$$

où les α_i sont à déterminer. On impose de plus que $\langle P_n, P_i \rangle = 0$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. On obtient donc que α_i vérifie

$$0 = \langle x_n, P_i \rangle + \alpha_i \langle P, P_i \rangle$$

par propriétés des $P_0, \ldots, P_n - 1$ déjà construits. Le polynôme P_i n'est pas nul et on obtient que

$$\alpha_i = -\frac{\langle x_n, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle}.$$

Nous venons de montrer que si le polynôme P_n existe, il est unique et vaut $P_n(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i$ avec de tels α_i. De plus, ce polynôme existe bien et répond au problème.

(c) Si $n=2$, la relation demandée est celle utilisée lors de la construction de P_2. Soit maintenant $n \geq 3$. Le polynôme $P_n - xP_{n-1}$ est de degré $n-1$. Il existe donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ avec

$$P_n - xP_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i$$

Pour avancer, il paraît judicieux de montrer que les λ_j sont nuls pour $0 \leq j \leq n-3$. Soit un tel j, on a

$$\langle P_j, P_n - xP_{n-1} \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \langle P_j, P_i \rangle .$$

Le membre de doite vaut $\lambda_j \langle P_j, P_j \rangle$. Le membre de gauche se calcule comme suit :

$$\langle P_j, P_n - xP_{n-1} \rangle = - \langle P_j, xP_{n-1} \rangle = - \langle xP_j, P_{n-1} \rangle = 0.$$

La première égalité vient du fait que P_j, de degré $n-3$, est orthogonal à P_n, la seconde de la définition du produit scalaire, la dernière du fait que xP_j, de degré $n-2$, est orthogonal à P_{n-1}. Nous avons donc montré l'existence de deux réels a et b tels que

$$P_n - xP_{n-1} = aP_{n-1} + bP_{n-2}.$$

Le produit scalaire de cette égalité par P_{n-1} amène

$$- \langle P_{n-1}, xP_{n-1} \rangle = a \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle$$

d'où la valeur de a. Le produit scalaire par P_{n-2} donne

$$- \langle P_{n-2}, xP_{n-1} \rangle = b \langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle = - \langle xP_{n-2}, P_{n-1} \rangle .$$

Or xP_{n-2} est unitaire de degré $n-1$. Il s'écrit donc $xP_{n-2} = P_{n-1} + Q$ où Q est de degré $n-2$. Du coup,

$$\langle xP_{n-2}, P_{n-1} \rangle = \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle + \langle Q, P_{n-1} \rangle = \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle .$$

D'où la valeur de b.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Notons $x_1, \dots, x_p$ les points distincts de l'intervalle I en lesquels le polynôme P_n change de signe. Ces points sont des racines de P_n et on a forcément $p \leq n$. De plus, $\langle P_n, P_0 \rangle = \int_I P_n(x)\omega(x)d\lambda(x) = 0$ donc P_n change de signe sur I et $p \geq 1$.

Si on montre que $p = n$, on aura à la fois prouvé que toutes les racines de P_n sont dans I et qu'elles sont simples. Considérons le polynôme $Q(x) = \prod_{i=1}^{p}(x - x_i)$. Ce polynôme est de degré p et change de signe sur I en même temps que P_n. Le polynôme QP_n est donc non-nul, continu, et de signe constant sur I. Par conséquent

$$\langle Q, P_n \rangle = \int_I Q(x)P_n(x)\omega(x)\ d\lambda \neq 0.$$

Or P_n est orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur à $n-1$. On obtient donc que $\deg(Q) = p \geq n$.